ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC QUYẾN

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LỚP HÀM LOGARIT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC QUYẾN

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LỚP HÀM LOGARIT

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học và là một bộ phận quan trọng của giải tích và đại số. Đẳng thức, bất đẳng thức trong lớp hàm logarit là một trong những nội dung cơ bản và quan trọng của chương trình toán bậc trung học phổ thông. Chuyên đề nằm trong chương trình bồi dưỡng HSG ở các lớp THPT phục vụ các kỳ thi HSG quốc gia và khu vực.

Đặc biệt, trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, các bài toán liên quan tới các tính chất của hàm logarit thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó và đòi hỏi tư duy, khả năng phán đoán cao, song nó lại luôn có sức hấp dẫn, thu hút sự tìm tòi, óc sáng tạo của học sinh.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề hàm logarit, tôi chọn đề tài luận văn "Đẳng thức và bất đẳng thức trong lớp hàm logarit".

Tiếp theo, khảo sát một số lớp bài toán từ các đề thi HSG Quốc gia và các tỉnh thành trong cả nước những năm gần đây.

Cấu trúc luận văn gồm ba chương và phần mở đầu, kết luận.

Chương 1. Một số kiến thức liên quan đến hàm logarit. Trong chương này tác giả trình bày một số tính chất cơ bản của hàm logarit, đặc trưng của hàm tuần hoàn nhân tính và một số định lí liên quan đến lớp hàm lồi và hàm lồi logarit.

Chương 2. Trình bày về đẳng thức logarit trong lớp hàm số chuyển đổi các đại lượng trung bình thông qua một số bài toán, sử dụng phương trình hàm Cauchy để giải phương trình hàm Cauchy dạng logarit. Cuối chương dành để trình bày các phương pháp giải phương trình siêu việt dạng logarit cùng với các ví dụ tương ứng.

Chương 3. Bất đẳng thức trong lớp hàm logarit. Chương này trình bày về bất đẳng thức hàm logarit và phương pháp giải bất đẳng thức chứa logarit thông qua các ví dụ cụ thể. Ngoài ra còn trình bày các ứng dụng của các định lí để giải các bài toán cực trị hàm logarit cũng như các bài

toán tìm giới hạn và ứng dụng hàm lồi, hàm logarit trong chứng minh một lớp các bất đẳng thức kinh điển.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Giáo sư, Tiến sĩ khoa học Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Thầy, người đã tận tình hướng dẫn, và truyền đạt kiến thức, kinh nghiệm nghiên cứu cho tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các Thầy Cô trong khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy, giúp đỡ và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình và bạn bè đồng nghiệp đã luôn giúp đỡ và động viên tôi trong quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2020.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Quyến

Chương 1. Một số kiến thức liên quan đến hàm logarit

Mục đích của chương này là trình bày một số tính chất cơ bản của hàm logarit; đặc trưng của hàm tuần hoàn nhân tính và một số định lí liên quan đến lớp hàm lồi và hàm lồi logarit. Các kết quả chính của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2].

1.1 Một số tính chất cơ bản của hàm logarit

Định nghĩa 1.1. Cho $a > 0, a \neq 1$. Khi đó hàm số $f(x) = \log_a x$ được gọi là *hàm số logarit* cơ số a.
Từ định nghĩa này ta suy ra: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $x = a^{\log_a x}$, $x = \log_a a^x$.

Trong các phần tiếp theo, ta giả sử $0 < a \neq 1$.

Nhận xét 1.1.

i) Hàm số logarit có tập xác định $D = (0; +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbb{R}$.

ii) Hàm số $f(x) = \log_a x$ liên tục và có đạo hàm với mọi $x > 0$, hơn nữa

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Tính chất 1.1 (Tính đơn điệu)**.** Ta khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \log_a x$ trong 2 trường hợp.
- Trường hợp 1: $a > 1$.
Khi đó, $\ln a > 0$ nên suy ra

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0.$$

Vậy, khi $a > 1$ thì $f(x) = \log_a x$ là hàm đồng biến trên D.
- Trường hợp 2: $0 < a < 1$.

Trong trường hợp này $f'(x) < 0, \forall x \in D$. Vậy, khi $0 < a < 1$ thì $f(x) = \log_a x$ là hàm số nghịch biến trên D.

Tính chất 1.2 (Tính lồi, lõm)**.** Xét hàm số $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$, ta có

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$
$$f''(x) = \frac{-1}{x^2 \ln a}.$$

- Nếu $a > 1$ tức $\ln a > 0$ thì $y'' < 0$ suy ra hàm số lõm trên $(0; +\infty)$.
- Nếu $0 < a < 1$ tức $\ln a < 0$ thì $y'' > 0$ suy ra hàm số lồi trên $(0; +\infty)$.

Tính chất 1.3. Với mọi $a > 0, a \neq 1$ và $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, ta có

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,\ \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Tính chất 1.4. Với mọi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x > 0$. Với α bất kỳ, ta có

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ \log_a x = \frac{1}{\alpha} \log_a x^\alpha = \alpha \log_{a^\alpha} x = \log_{a^\alpha} x^\alpha.$$

Tính chất 1.5. Với mọi $0 < a \neq 1, b \neq 1$ và $x > 0$, ta có

$$\log_a b. \log_b c = \log_a c, \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Tính chất 1.6. Với mọi $0 < a \neq 1, 0 < c \neq 1$ và $x > 0$, ta có

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Tính chất 1.7. Hàm số $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên khoảng $J \in \mathbb{R}$ thì hàm số $y = \log_a u(x)$, $(0 < a \neq 1)$ có đạo hàm trên J và $(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

Tính chất 1.8. Với mọi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, ta có

i) Khi $a > 1$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ii) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

1.2 Đặc trưng của hàm tuần hoàn nhân tính

Trong chương trình giải tích ta thường làm quen với lớp hàm lượng giác là những hàm tuần hoàn (cộng tính) quen thuộc. Rất nhiều phương trình hàm và các dạng toán liên quan đòi hỏi cần tìm hiểu thêm các tính chất và đặc trưng của lớp hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính gắn với hàm logarit.

1.2.1 Hàm tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là *hàm tuần hoàn nhân tính* chu kỳ a; $(a > 1)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ suy ra } a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ 1.1. Xét $f(x) = \sin(2\pi \ \log_2 x)$. Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$. Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$\begin{aligned} f(2x) &= \sin(2\pi \ \log_2(2x)) \\ &= \sin(2\pi(1 + \log_2 x)) \\ &= \sin(2\pi \ \log_2 x) = f(x). \end{aligned}$$

Tính chất 1.9. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ tương ứng là a và b trên M và $\dfrac{\ln|a|}{\ln|b|} = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì $F(x) = f(x) + g(x)$ và $G(x) = f(x).g(x)$ là các hàm tuần hoàn nhân tính trên M.

Chứng minh. Từ giả thiết $\dfrac{\ln|a|}{\ln|b|} = \dfrac{m}{n}$ suy ra $|a|^n = |b|^m$. Ta chứng minh $T := a^{2n} = b^{2m}$ là chu kỳ của $F(x)$ và $G(x)$. Thật vậy, ta có

$$F(Tx) = f(a^{2n}x) + g(b^{2m}x) = f(x) + g(x) = F(x), \ \forall x \in M;$$

$$G(Tx) = f(a^{2n}x)g(b^{2m}x) = f(x)g(x) = G(x), \ \forall x \in M.$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$, $T^{\pm 1}x \in M$. Do đó, $F(x), G(x)$ là các hàm tuần hoàn nhân tính trên M. □

Tính chất 1.10. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ a, $a > 0$ trên $\mathbb{R}$ thì $g(t) = f(\ln t)$, $(t > 0)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ e^a trên $\mathbb{R}^+$.

Ngược lại, nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a > 1)$ trên $\mathbb{R}^+$ thì $g(t) = f(e^t)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $\ln a$ trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ a, $a > 0$ trên $\mathbb{R}$. Xét $g(t) = f(\ln t)$, $(t > 0)$.

Ta có

$$\begin{aligned} g(e^a t) &= f(\ln(e^a t)) = f(\ln e^a + \ln t) \\ &= f(a + \ln t) = f(\ln t) = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Vậy $g(t)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ e^a trên $\mathbb{R}^+$.

Ngược lại, giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(0 < a \neq 1)$ trên $\mathbb{R}^+$.

Xét $g(t) = f(e^t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} g(t + \ln a) &= f(e^{t+\ln a}) = f(e^t.e^{\ln a}) \\ &= f(ae^t) = f(e^t) = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $g(t)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $\ln a$ trên $\mathbb{R}$. □

1.2.2 Hàm phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.3. Hàm số $f(x)$ được gọi là *hàm phản tuần hoàn nhân tính* chu kỳ a $(a > 1)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ suy ra } a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2. Xét $f(x) = \cos(\pi \log_2 x)$. Khi đó $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì

$$f(2x) = \cos(\pi \log_2(2x)) = \cos(\pi + \pi \log_2 x) = -\cos(\pi \log_2 x) = -f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Ví dụ 1.3. Xét $f(x) = \dfrac{1}{2}[\sin(2\pi\ \log_2(\sqrt{2}x)) - \sin(2\pi\ \log_2 x)]$. Khi đó $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ $\sqrt{2}$ trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $(\sqrt{2})^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$f(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2}[\sin(2\pi\ \log_2(2x)) - \sin(2\pi\ \log_2(\sqrt{2}x))]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(2\pi(1+\log_2 x)) - \sin(2\pi\ \log_2(\sqrt{2}x))]$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(2\pi\ \log_2 x) - \sin(2\pi\ \log_2(\sqrt{2}x))] = -f(x).$$

Tính chất 1.11. Mọi hàm phản tuần hoàn nhân tính trên M đều là hàm tuần hoàn nhân tính trên M.

Chứng minh. Theo giả thiết tồn tại $b > 1$ sao cho $\forall x \in M$ thì $b^{\pm 1} \in M$ và

$$f(bx) = -f(x),\ \ \forall x \in M.$$

Suy ra, $\forall x \in M$ thì $b^{\pm 1} \in M$ và

$$f(b^2x) = f(b(bx)) = -f(bx) = -(-f(x)) = f(x),\ \ \forall x \in M.$$

Như vậy, $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ b^2 trên M. □

Tính chất 1.12. $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ b $(b > 1)$ trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}(g(bx) - g(x)),$$

trong đó, $g(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ b^2 trên M.

Chứng minh. (i) Giả sử f là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ b trên M. Khi đó $g(x) = -f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ b^2 trên M và

$$\frac{1}{2}(g(bx) - g(x)) = \frac{1}{2}(-f(bx) - (-f(x)))$$
$$= \frac{1}{2}(-(-f(x)) + f(x)) = f(x), \forall x \in M.$$

(ii) Ngược lại, $f(x) = \frac{1}{2}(g(bx) - g(x))$, thì

$$f(bx) = \frac{1}{2}(g(b^2x) - g(bx)) = \frac{1}{2}(g(x) - g(bx))$$
$$= -\frac{1}{2}(g(bx) - g(x)) = -f(x),\ \forall x \in M.$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$ thì $b^{\pm 1}x \in M$. Do đó, $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính trên M. □